$= x(\ln x)^2 - 2\left(x\ln x - \int dx\right) =$

$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$

Como $F(e) = 0 \Rightarrow 0 = e - 2e + 2e + C \Rightarrow C = -e$

Luego $F(x) = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x - e$

20 **Encuentra la primitiva de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$ que se anula en $x = \dfrac{\pi}{4}$.**

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2}\text{arc sen } 2x + C$$

La función arc sen x no está definida para $x = \dfrac{\pi}{2}$, por tanto, el ejercicio no tiene solución, puesto que es evidente que la primitiva no puede anularse en $x = \dfrac{\pi}{4}$.

21 **Para cada una de estas dos funciones, calcula la primitiva que cumple la condición de que su gráfica pase por el punto de coordenadas (0, 1):**

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ y } g(x) = \text{tg } x$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \sqrt{x^2+1} + C$$

Como su gráfica ha de pasar por (0, 1):

$$1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$$

La primera función buscada es $F(x) = \sqrt{x^2+1}$.

$$\int \text{tg } x = -\ln|\cos x| + C$$

Se debe cumplir que:

$1 = -\ln|\cos 0| + C = -\ln 1 + C = 0 + C \Rightarrow C = 1$

Luego $G(x) = -\ln|\cos x| + 1$.

22 **Calcula $f(x)$ de manera que $f'(x) = x\ln(x^2+1)$ y que $f(0) = 0$.**

$$f(x) = \int x\ln(x^2+1)\,dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = \ln(x^2+1) \Rightarrow du = \dfrac{2x}{x^2+1}dx \\ dv = x\,dx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x^2+1) - \int\left(\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x^2+1) - \int\left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x^2+1) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

Como $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

Luego $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2}\cdot\ln(x^2+1) - \dfrac{x^2}{2}$

23 **Averigua la función $f(x)$ cuya función derivada es $f'(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, sabiendo que $f(0) = 2$.**

$$f(x) = \int\frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

Como $f(0) = 2$, sustituyendo, obtenemos $C = 2$

Por tanto $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2$

24 **Determina la función f, definida en todo número real, que verifica las dos condiciones siguientes:**

- **$f'(x) = x^2e^x$**
- **Su gráfica pasa por el punto (0, 2).**

$$f(x) = \int x^2e^x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{matrix}\right\} =$$

$$= x^2e^x - \int 2x\,e^x dx = \left\{\begin{matrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{matrix}\right\} =$$

$$= x^2e^x - 2\left(x\,e^x - \int e^x dx\right) =$$

$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

Puesto que $f(0) = 2 \Rightarrow 1\cdot(0+2) + C = 2 \Rightarrow C = 0$

Por tanto $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 2)$

25 **Obtén la expresión de una función $f(x)$, sabiendo que $f'(x) = (x+1)e^{2x}$, y que $f(0) = \dfrac{5}{4}$.**

$$f(x) = \int(x+1)e^{2x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x+1 \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{x+1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{x+1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C =$$

$$= e^{2x}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + C$$

Puesto que $f(0) = \dfrac{5}{4} \Rightarrow 1\cdot\left(0 + \dfrac{1}{4}\right) + C = \dfrac{5}{4} \Rightarrow C = 1$

Por tanto $f(x) = e^{2x}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\right) + 1$

26 **PAU** **Encuentra la primitiva de $f(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$ sabiendo que su gráfica tiene como asíntota horizontal $y = 2$.**

$$F(x) = \int\frac{-1}{(x-2)^2}dx = \frac{1}{x-2} + C = \frac{1 + Cx - 2C}{x-2}$$

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 2 \Rightarrow C = 2$

Luego:

$$F(x) = \frac{1}{x-2} + 2$$

27 **Encuentra la primitiva de la función $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ cuya recta tangente en el punto de abscisa $x = e$ pasa por el origen de coordenadas.**

$$F(x) = \int\frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln|x|| + C$$

$F(e) = C$

$F'(e) = f(e) = \dfrac{1}{e}$

Luego la ecuación de la recta tangente a F en $x = e$, es:

$$y - C = \frac{1}{e}(x - e)$$

Como debe pasar por (0, 0), tenemos:

$$-C = -1 \Rightarrow C = 1$$

Es decir, $F(x) = \ln|\ln|x|| + 1$

$= x(\ln x)^2 - 2\left(x \ln x - \int dx\right) =$

$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$

Como $F(e) = 0 \Rightarrow 0 = e - 2e + 2e + C \Rightarrow C = -e$

Luego $F(x) = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x - e$

20 **Encuentra la primitiva de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$ que se anula en $x = \dfrac{\pi}{4}$.**

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2}\,\text{arc sen } 2x + C$$

La función arc sen x no está definida para $x = \dfrac{\pi}{2}$, por tanto, el ejercicio no tiene solución, puesto que es evidente que la primitiva no puede anularse en $x = \dfrac{\pi}{4}$.

21 **Para cada una de estas dos funciones, calcula la primitiva que cumple la condición de que su gráfica pase por el punto de coordenadas (0, 1):**

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{y} \quad g(x) = \text{tg}\, x$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1} + C$$

Como su gráfica ha de pasar por (0, 1):

$$1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$$

La primera función buscada es $F(x) = \sqrt{x^2+1}$.

$$\int \text{tg}\, x = -\ln|\cos x| + C$$

Se debe cumplir que:

$1 = -\ln|\cos 0| + C = -\ln 1 + C = 0 + C \Rightarrow C = 1$

Luego $G(x) = -\ln|\cos x| + 1$.

22 **Calcula $f(x)$ de manera que $f'(x) = x\ln(x^2+1)$ y que $f(0) = 0$.**

$$f(x) = \int x\ln(x^2+1)\,dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} u = \ln(x^2+1) \Rightarrow du = \dfrac{2x}{x^2+1}dx \\ dv = x\,dx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x^2+1) - \int\left(\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x^2+1) - \int\left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x^2+1) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

Como $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

Luego $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2}\cdot\ln(x^2+1) - \dfrac{x^2}{2}$

23 **Averigua la función $f(x)$ cuya función derivada es $f'(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, sabiendo que $f(0) = 2$.**

$$f(x) = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

Como $f(0) = 2$, sustituyendo, obtenemos $C = 2$

Por tanto $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2$

24 **Determina la función f, definida en todo número real, que verifica las dos condiciones siguientes:**

- **$f'(x) = x^2 e^x$**
- **Su gráfica pasa por el punto (0, 2).**

$$f(x) = \int x^2 e^x\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array}\right\} =$$

$$= x^2 e^x - \int 2x\,e^x dx = \left\{\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array}\right\} =$$

$$= x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x dx\right) =$$

$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

Puesto que $f(0) = 2 \Rightarrow 1\cdot(0+2) + C = 2 \Rightarrow C = 0$

Por tanto $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 2)$

25 **Obtén la expresión de una función $f(x)$, sabiendo que $f'(x) = (x+1)e^{2x}$, y que $f(0) = \dfrac{5}{4}$.**

$$f(x) = \int (x+1)\,e^{2x}\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = x+1 \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{x+1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{x+1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C =$$

$$= e^{2x}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + C$$

Puesto que $f(0) = \dfrac{5}{4} \Rightarrow 1\cdot\left(0 + \dfrac{1}{4}\right) + C = \dfrac{5}{4} \Rightarrow C = 1$

Por tanto $f(x) = e^{2x}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\right) + 1$

26 **PAU** **Encuentra la primitiva de $f(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$ sabiendo que su gráfica tiene como asíntota horizontal $y = 2$.**

$$F(x) = \int \frac{-1}{(x-2)^2}\,dx = \frac{1}{x-2} + C = \frac{1 + Cx - 2C}{x-2}$$

Si $\lim_{x\to\infty} F(x) = 2 \Rightarrow C = 2$

Luego:

$$F(x) = \frac{1}{x-2} + 2$$

27 **Encuentra la primitiva de la función $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ cuya recta tangente en el punto de abscisa $x = e$ pasa por el origen de coordenadas.**

$$F(x) = \int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln|x|| + C$$

$F(e) = C$

$F'(e) = f(e) = \dfrac{1}{e}$

Luego la ecuación de la recta tangente a F en $x = e$, es:

$$y - C = \frac{1}{e}(x - e)$$

Como debe pasar por (0, 0), tenemos:

$$-C = -1 \Rightarrow C = 1$$

Es decir, $F(x) = \ln|\ln|x|| + 1$