EJEMPLO RESUELTO DE CONTINUIDAD

Dada la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x+1} & si \quad x<0\\ \dfrac{x^2-2x-3}{x-3} & si \quad x\geq 0\end{cases}$$

Estudia su continuidad y clasifica sus discontinuidades.

SOLUCIÓN:

Se trata de una función definida a trozos. En el primer trozo es una función racional en la que Dom g(x) = R – {-1}. Por tanto en x = -1 (punto incluido en el dominio de f(x)) presenta problemas de continuidad.

Para $x\geq 0$ la función f(x) está definida como otra función racional cuyo dominio son R – {3}. Como x=3 está incluido en $x\geq 0$, en este punto también hay que estudiar la continuidad.

Por último, en x = 0 es donde cambia la definición de la función, y tendremos que estudiar si la función es continua o no en este punto.

- X = -1

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{2x+1}{x+1}=\frac{K}{0}=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1+}\frac{2x+1}{x+1}=\frac{K}{0}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow noexiste \lim_{x\to -1} f(x)$$

Luego en x = -1 la función presenta una **discontinuidad de salto infinito**.

- X = 3

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+1)=4\\ \displaystyle\lim_{x\to -3^+} f(x)=4\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x)=4$$

Pero no existe f(3) por lo que la función en x = 3 presenta una **discontinuidad evitable.**

- X =0

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{x+1}=1\\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x-3}{x-3}=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=1$$

Como f(0) = 1 y además $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=1$= f(0), la función es **continua** en x=0.