CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

1. Estudiar para qué valores de a y b la función es continua y derivable:

$$f(x)=\begin{cases} x^3-x & \text{si} \quad x<0 \\ ax+b & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

2. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} 3-ax^2 & si \quad x\leq 1 \\ \dfrac{2}{ax} & si \quad x>1 \end{cases}$$

   ¿Para qué valores de ***a*** es derivable?

3. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \cos x+2 & si \quad x<0 \\ \dfrac{2x}{\pi}+1 & si \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ sen\, x+1 & si \quad x\geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

4. Determinar los valores de a y b para que la siguiente función sea derivable en todos sus puntos:

$$f(x)=\begin{cases} bx^2+ax & Si \quad x\leq -1 \\ \dfrac{a}{x} & Si \quad -1<x\leq 1 \\ \dfrac{x^2+ax+1}{x+1} & Si \quad x>1 \end{cases}$$

5. Estudiar para qué valores de a y b la función es continua y derivable:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si \quad x\leq 0 \\ \sqrt{ax+b} & si \quad 0<x\leq 2 \\ \dfrac{-x}{2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}} & si \quad x>2 \end{cases}$$

SOLUCIONES

1. Estudiar para qué valores de a y b la función es continua y derivable:

$$f(x)=\begin{cases} x^3-x & \text{si} \quad x<0 \\ ax+b & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

$f(0)=b \qquad \lim_{x\to 0^-}\left(x^3-x\right)=0 \qquad \lim_{x\to 0^+}\left(ax+b\right)=b$

$b=0$

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & \text{si} \quad x<0 \\ a & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

$f'(0^-)=-1 \quad f'(0^+)=a$

$a=-1$

2. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} 3-ax^2 & si \quad x\leq 1 \\ \dfrac{2}{ax} & si \quad x>1 \end{cases}$$

¿Para qué valores de ***a*** es derivable?

Continuidad en $x=1$

$f(1)=3-a$

$\lim_{x\to 1^-}\left(3-ax^2\right)=3-a \qquad \lim_{x\to 1^+}\left(\dfrac{2}{ax}\right)=\dfrac{2}{a}$

$3-a=\dfrac{2}{a} \qquad a^2-3a-2=0$

$a=1 \qquad a=2$

$$f'(x)=\begin{cases} -2ax & \text{si} \quad x<1 \\ \dfrac{-2}{ax^2} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

$f'(1^-) = -2a$ $\qquad$ $f'(1^+) = \frac{-2}{a}$

$-2a = \frac{-2}{a}$ $\qquad$ $a^2 = 1$ $\qquad$ $a = \pm 1$

Derivable para $a = 1$

Para a= −1 no es continua

3. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + 2 & si \quad x < 0 \\ \frac{2x}{\pi} + 1 & si \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ sen\, x + 1 & si \quad x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La función no es continua en x = 0 porque no tiene imagen. Por tanto tampoco es derivable.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = sen\frac{\pi}{2} + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{2x}{\pi} + 1 = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} sen\frac{\pi}{2} + 1 = 2$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)} f(x)$$

Por lo que es continua, veamos si es derivable mediante las fórmulas de derivadas trigonométricas inmediatas.

$$f'(x) = \begin{cases} -sen\, x & si \quad x < 0 \\ \frac{2}{\pi} & si \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & si \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)^- = \frac{2}{\pi} \qquad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)^+ = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Como las derivadas laterales no coinciden no es derivable en el punto.

4. Determinar los valores de a y b para que la siguiente función sea derivable en todos sus puntos:

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 + ax & Si \ x \le -1 \\ \dfrac{a}{x} & Si \ -1 < x \le 1 \\ \dfrac{x^2 + ax + 1}{x + 1} & Si \ x > 1 \end{cases}$$

Para qué una función sea derivable tiene que ser continua. En este caso la función no es continua para x = 0 cualesquiera que sean a y b, es decir, no existen valores de a y b que hagan continua la función.

Por tanto, no existen valores de a y b para los cuales la función sea derivable.

5. Estudiar para qué valores de a y b la función es continua y derivable:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & si & x \le 0 \\ \sqrt{ax + b} & si & 0 < x \le 2 \\ \dfrac{-x}{2\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}} & si & x > 2 \end{cases}$$

$$f(0) = 2$$

$$\lim_{x \to 0^-} \left(x^2 + 2\right) = 2 \qquad \lim_{x \to 0^+} \sqrt{ax + b} = \sqrt{b}$$

$$\sqrt{b} = 2 \qquad b = 4$$

$$f(2) = \sqrt{2a + 4}$$

$$\lim_{x \to 2^-} \sqrt{2a + b} = \sqrt{2a + 4} \qquad \lim_{x \to 2^+} \frac{-2}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2a + 4} = \sqrt{2} \qquad a = -1$$

Para $a = -1$ y $b = 4$ la función es continua en R

$$(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x<0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-x+4}} & si \quad 0<x<2 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} & si \quad x>2 \end{cases}$$

$f'(0^-)=0$ $\qquad$ $f'(0^+)=-\frac{1}{4}$

No es derivable en $x=0$

$f'(2^-)=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$ $\qquad$ $f'(2^+)=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$

Es derivable en $x=2$